

Finansijska i aktuarska matematika

6. vježbe

Mart 2020.

Zadatak br. 1

Osoba je pozajmila iz banke 15.000€, koje vraća jednakim kvartalnim anticipativnim anuitetima u toku 8 godina, uz 9% (pa)d. Osoba je uz plaćeni osmi anuitet, uplatila još 3.000€. Reprogramirati ostatak plana otplate, tj. odrediti visinu preostalih kvartalnih anuiteta ako je kamatna stopa smanjena za 1%, od kraja druge godine.

Rješenje:

$$K=15.000$$

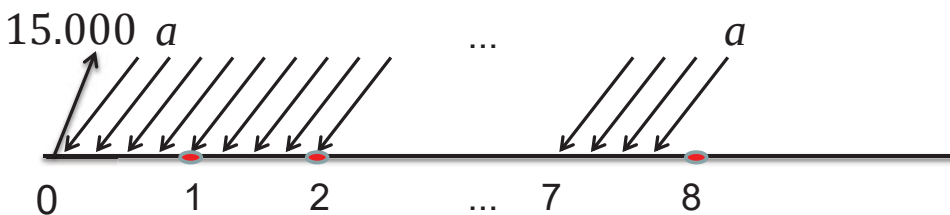
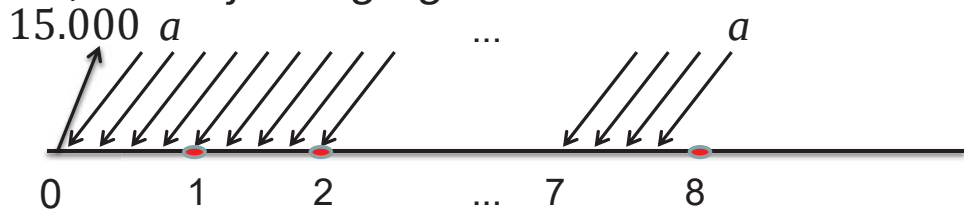
$$n=8 \cdot 4=32$$

$$q=1,09 \text{ (godišnji faktor akumulacije)}$$

$$q_1 = \sqrt[4]{1,09} = 1,02178 \text{ (kvartalni faktor akumulacije)}$$

$$q_2=1,08 \text{ (godišnji faktor akumulacije)}$$

$$q_3 = \sqrt[4]{1,08} = 1,0194 \text{ (kvartalni faktor akumulacije)}$$

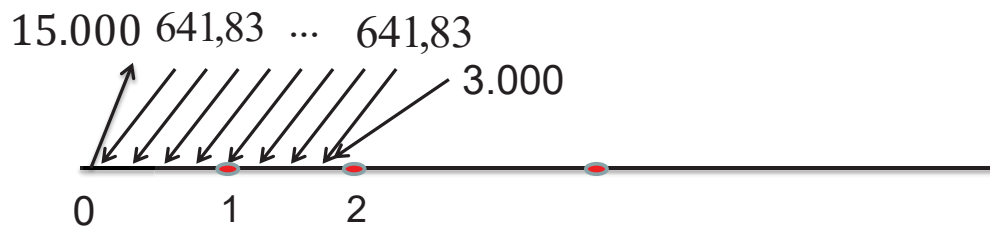


$$15.000 = a + \frac{a}{q_1} + \frac{a}{q_1^2} + \dots + \frac{a}{q_1^{31}}$$

$$15.000 = \frac{a}{q_1^{31}} \cdot (q_1^{31} + q_1^{30} + \dots + 1)$$

$$15.000 = \frac{a}{q_1^{31}} \cdot \frac{q_1^{32} - 1}{q_1 - 1} \Rightarrow a = 15.000 \cdot q_1^{31} \cdot \frac{q_1 - 1}{q_1^{32} - 1}$$

$$a = 15.000 \cdot 1,02178^{31} \cdot \frac{1,02178 - 1}{1,02178^{32} - 1} = 641,83$$



$$K_{1/3} = 15.000 \cdot q_1^7 - (641,83 \cdot q_1^7 + 641,83 \cdot q_1^6 + \dots + 641,83) - 3.000$$

$$K_{1/3} = 15.000 \cdot q_1^7 - 641,83 \cdot (q_1^7 + q_1^6 + \dots + 1) - 3.000$$

$$K_{1/3} = 15.000 \cdot q_1^7 - 641,83 \cdot \frac{q_1^8 - 1}{q_1 - 1} - 3.000$$

$$\boxed{K_{1/3} = 8.898,294}$$

$$\boxed{K_2 = K_{1/3} \cdot 1,02178 = 9.070,92}$$

$$K_2 = a_1 + \frac{a_1}{q_3} + \frac{a_1}{q_3^2} + \dots + \frac{a_1}{q_3^{23}}$$

$$K_2 = \frac{a_1}{q_3^{23}} \cdot (q_3^{23} + q_3^{22} + \dots + 1)$$

$$K_2 = \frac{a_1}{q_3^{23}} \cdot \frac{q_3^{24} - 1}{q_3 - 1} \Rightarrow a_1 = K_2 \cdot q_3^{23} \cdot \frac{q_3 - 1}{q_3^{24} - 1}$$

$$a_1 = 9.070,92 \cdot 1,0194^{23} \cdot \frac{1,0194 - 1}{1,0194^{24} - 1}$$

$$\boxed{a_1 = 467,27}$$

Zadatak br. 2

Ako je kapitalni izdatak za mašinu A danas 720.000€ a njen vijek trajanja 6 godina, da li je mašina A rentabilna ako je kamatna stopa 10% godišnje a neto godišnji prihodi su 450.000€, 220.000€, 200.000€, 130.000€, 130.000€, 130.000€ respektivno za 1,2,...6 godinu. Primijeniti metod sadašnje vrijednosti.

Rješenje:

$$T_0 = 720.000$$

$$P_1 = 450.000$$

$$P_2 = 220.000$$

$$P_3 = 200.000$$

$$P_4 = P_5 = P_6 = 130.000$$

Neto efekat investicije = Sadašnja vrijednost prihoda – Sadašnja vrijednost rashoda

$$SV_P = \frac{450.000}{1,1} + \frac{220.000}{1,1^2} + \frac{200.000}{1,1^3} + \frac{130.000}{1,1^4} + \frac{130.000}{1,1^5} + \frac{130.000}{1,1^6}$$

$$SV_P = 409.090,91 + 181.818,18 + 150.262,96 + 88.791,75 + 80.719,77 + 73.381,61$$

$$\left. \begin{array}{l} SV_P = 984.065,1789 \\ SV_T = 720.000 \end{array} \right\} \Rightarrow NEI = SV_P - SV_T = 984.065,1789 - 720.000 = 264.065,1789 > 0$$

Mašina je rentabilna!

Zadatak br. 3

Koristeći metodu EGT odrediti efekat sljedeće investicije: početno ulaganje je 1.000.000€ a zatim svake godine u toku sljedećih 9 godina po 200.000€. Prihodi su po 500.000€ krajem svake godine za 10 godina, a vrijednost investicije na kraju desete godine je 800.000€. Kamatna stopa je 11% (pa)d. Izračunati prosječni godišnji neto efekat investicije.

Rješenje:

Neto efekat investicije = Sadašnja vrijednost prihoda – Sadašnja vrijednost troškova

$$SV_T = 1.000.000 + \frac{200.000}{1,11} + \frac{200.000}{1,11^2} + \dots + \frac{200.000}{1,11^9}$$

$$SV_T = 100.0000 + \frac{200.000}{1,11^9} \cdot (1,11^8 + 1,11^7 + \dots + 1)$$

$$SV_T = 100.0000 + \frac{200.000}{1,11^9} \cdot \frac{1,11^9 - 1}{1,11 - 1}$$

$$SV_T = 1.000.000 + 1.107.409,506$$

$$\boxed{SV_T = 2.107.409,506}$$

$$SV_P = \frac{500.000}{1,11} + \frac{500.000}{1,11^2} + \dots + \frac{500.000}{1,11^{10}} + \frac{800.000}{1,11^{10}}$$

$$SV_P = \frac{500.000}{1,11^{10}} \cdot \frac{1,11^{10} - 1}{1,11 - 1} + \frac{800.000}{1,11^{10}}$$

$$SV_P = 2.944.616,00557 + 281.747,583$$

$$\boxed{SV_P = 3.226.363,588}$$

$$NEI = SV_P - SV_T = 3.226.363,588 - 2.107.409,506$$

$$\boxed{NEI = 1.118.954,08}$$

Prosječni godišnji neto efekat investicije :

$$a = NEI \cdot 1,11^{10} \cdot \frac{1,11 - 1}{1,11^{10} - 1}$$

$$a = 1.118.954,08 \cdot 1,11^{10} \cdot \frac{1,11 - 1}{1,11^{10} - 1}$$

$$\boxed{a = 190.000}$$

Zadatak br. 4 Osoba je pozajmila iz banke 15000€, a nakon godinu dana još 5000€. Zajam se vraća jednakim mjesečnim anuitetima po 600€, uz 9% (pa)d., počev od kraja druge godine. Odrediti koliko anuiteta treba da vrati osoba, kao i visinu nepotpunog anuiteta.

Rješenje:

Neka je $q = 1.09$ dati godišnji akumulacioni faktor.

Tada je $q_1 = \sqrt[12]{q} = 1.007207323$ odgovarajući mjesečni akumulacioni faktor.

Označimo sa n broj mjesečnih anuiteta po 600€.

Da nema nepotpunog mjesečnog anuiteta važile bi jednakosti:

$$15000 + \frac{5000}{q} = \frac{600}{q^2} + \frac{600}{q^2 q_1} + \frac{600}{q^2 q_1^2} + \dots + \frac{600}{q^2 q_1^{n-1}} = \frac{600}{q^2 q_1^{n-1}} \cdot \frac{q_1^n - 1}{q_1 - 1}$$

Ovo nam dozvoljava da izračunamo vrijednost broja n . Prvo ćemo izraziti vrijednost q_1^n :

$$\begin{aligned} q_1^n \left(15000 + \frac{5000}{q} \right) &= q_1^n \frac{600 q_1}{q^2 (q_1 - 1)} - \frac{600 q_1}{q^2 (q_1 - 1)} \\ q_1^n \frac{600 q_1}{q^2 (q_1 - 1)} - q_1^n \left(15000 + \frac{5000}{q} \right) &= \frac{600 q_1}{q^2 (q_1 - 1)} \\ q_1^n &= \frac{600 q_1}{q^2 (q_1 - 1)} \cdot \frac{1}{\frac{600 q_1}{q^2 (q_1 - 1)} - (15000 + \frac{5000}{q})} \\ q_1^n &= \frac{1}{1 - \frac{(15000 + \frac{5000}{q})}{\frac{600 q_1}{q^2 (q_1 - 1)}}} = \frac{1}{1 - \frac{q^2 (q_1 - 1) (15000 + \frac{5000}{q})}{600 q_1}} \end{aligned}$$

Nakon uvrštavanja poznatih vrijednosti q i q_1 nastavljamo sa računanjem broja n :

$$1.007207323^n = 1.384162949$$

$$n = \frac{\ln(1.384162949)}{\ln(1.007207323)} = 45.26864142$$

Kako izračunato n nije prirođan broj, zaključujemo da je plaćeno 45 anuiteta po 600€, a nakon njih još jedan nepotpuni anuitet čiju ćemo vrijednost označiti sa a .

To znači da važi jednakost:

$$15000 + \frac{5000}{q} = \frac{600}{q^2} + \frac{600}{q^2 q_1} + \frac{600}{q^2 q_1^2} + \dots + \frac{600}{q^2 q_1^{n-1}} + \frac{a}{q^2 q_1^n} = \frac{600}{q^2 q_1^{n-1}} \cdot \frac{q_1^n - 1}{q_1 - 1} + \frac{a}{q^2 q_1^n},$$

odakle dobijamo da je:

$$a = q^2 q_1^n \left(15000 + \frac{5000}{q} - \frac{600}{q^2 q_1^{n-1}} \cdot \frac{q_1^n - 1}{q_1 - 1} \right) = 161.6069604$$

Dakle, plaćeno je 45 anuiteta od 600€, nakon čega je plaćen još jedan anuitet u visini 161.6069604€.

Zadatak br. 5 Osoba je pozajmila iz banke 30.000€, a kroz 2 godine još toliko. Zajam se vraća jednakim dekurzivnim mjesečnim anuitetima od kraja 6-te do kraja 16-te godine, uz 9% (pa)d. Osoba je uz plaćeni 12-ti anuitet, uplatila još 3.000€. Reprogramirati ostatak plana otplate, tj. odrediti visinu preostalih mjesečnih anuiteta ako je kamatna stopa povećana i iznosi 10% (od trenutka uplate dodatnih 3.000€!).

Rješenje:

Neka je $q = 1.09$ dati godišnji akumulacioni faktor.

Tada je $q_1 = \sqrt[12]{q} = 1.007207323$ odgovarajući mjesečni akumulacioni faktor.

Anuiteti se plaćaju od kraja šeste do kraja šesnaeste godine, tj. u trajanju od 10 godina, odnosno 120 mjeseci.

Neka je a visina prvobitnog anuiteta (određenog prije uplate dodatnih 3.000€). Vrijednost a možemo izračunati iz jednakosti:

$$30000 + \frac{30000}{q^2} = \frac{a}{q^6 q_1} + \frac{a}{q^6 q_1^2} + \dots + \frac{a}{q^6 q_1^{120}} = \frac{a}{q^6 q_1^{120}} \cdot \frac{q_1^{120} - 1}{q_1 - 1}$$

Odavde dobijamo da je:

$$a = q^6 q_1^{120} \frac{q_1 - 1}{q_1^{120} - 1} \left(30000 + \frac{30000}{q^2} \right) = 1156.243644$$

Osoba je uz dvanaesti plaćeni anuitet (tačno 7 godina nakon prve pozajmice) uplatila dodatnih 3000€. Označimo preostali dug u tom trenutku sa K_7 . Ta vrijednost je jednaka razlici akumuliranih uplata i svih (akumuliranih) isplata:

$$\begin{aligned} K_7 &= 30000q^7 + 30000q^5 - (aq_1^{11} + aq_1^{10} + \dots + a) - 30000 \\ &= 30000q^7 + 30000q^5 - a \frac{q_1^{12} - 1}{q_1 - 1} - 3000 = 83561.53237 \end{aligned} \quad (1)$$

Komentar: Izraz za K_7 smo mogli dobiti i izjednačavajući sadašnje vrijednosti zajmova i uplata na sljedeći način:

$$30000 + \frac{30000}{q^2} = \frac{a}{q^6 q_1} + \frac{a}{q^6 q_1^2} + \frac{a}{q^6 q_1^{12}} + \frac{3000}{q^6 q_1^{12}} + \frac{K_7}{q^6 q_1^{12}}, \quad (2)$$

gdje lijeva strana jednakost predstavlja sadašnju vrijednost svih pozajmica, a desna strana predstavlja zbir sadašnje vrijednosti uplaćenog novca (anuiteta i dodatnih 3000€) i sadašnje vrijednosti ostatka duga. Jednakosti (1) i (2) su ekvivalentne, što se može vidjeti ako jednakost (1) podijelimo sa q^7 i iskoristimo jednakost $q = q_1^{12}$.

Označimo sa q_2 kamatnu stopu koja važi nakon reprograma plana otplate, tj. nakon uplate dodatnih 3000€: $q_2 = 1.1$.

Neka je $q_3 = \sqrt[12]{q_2} = 1.00797414$ odgovarajuća mjesečna kamatna stopa.

Nakon reprograma plana otplate osoba će platiti 120-12=108 anuiteta. Ako je a_1 visina novog anuiteta koji treba izračunati, onda je:

$$K_7 = \frac{a_1}{q_3} + \frac{a_1}{q_3^2} + \dots + \frac{a_1}{q_3^{108}} = \frac{a_1}{q_3^{108}} \cdot \frac{q_3^{108} - 1}{q_3 - 1}$$

Iz posljednje jednakost možemo izraziti i izračunati a_1 :

$$a_1 = K_7 \cdot q_3^{108} \frac{q_3 - 1}{q_3^{108} - 1} = 1157.021424$$

Zadaci za pripremu kolokvijuma

Zadatak 1a)

- Kremasta smješa za pravljenje fila sadrži 10% vode. Pripremljeni krem sadrži 80% vode. Koliko se krema dobija od 20kg smješe?
- 20kg smješe sadrži 90% suve materije, odnosno $90\% \cdot 20 = 18$ kg suve materije.
- Ako je x količina krema, tada je $20\% \cdot x = 18$, odnosno $x = 1800/20 = 90$ kg.

Zadatak 1b)

- Jedna firma raspolaže kancelarijskim materijalom za 30 dana za svojih 20 zaposlenih. Poslije 10 dana 8 zaposlenih je napustilo firmu. Koliko će dana firma imati kancelarijskog materijala za preostali broj zaposlenih?

Zadatak 1b)

Dani	Zaposleni	K.materijal
20	20 (svi!)	ostatak
x=?	12	ostatak

$$x : 20 = \frac{20}{12} \cdot \frac{\text{ostatak}}{\text{ostatak}} \quad \Rightarrow \quad x = 20 \cdot \frac{20}{12} = 33,33$$

Zadatak 2

- Banka kupuje 16.05. mjenicu koja glasi na 5000€ sa dospijećem 17.07. Koliku je eskontnu stopu primijenila ukoliko je, poslije uzimanja provizije od 1‰ od nominalne vrijednosti mjenice i manipulativnih troškova od 5€, banka platila 4.470€?

Zadatak 2

$$d(16.05. - 17.07.) = 15 + 30 + 17 = 62$$

$$K_n = 5.000$$

$$K_0 - \underbrace{1\text{‰}K_n}_5 - 5 = 4.470 \Rightarrow K_0 = 4.480$$

$$4.480 = 5.000 \cdot \left(1 - \frac{62 \cdot p}{36.000}\right) \Rightarrow 1 - 0,0017222p = 0,896$$
$$\Rightarrow p = 60,39$$

Zadatak 3

- Ako se zajam vraća jednakim dekurzivnim kvartalnim anuitetima i ako je poslednja, 32-ga rata za 3.670€ veća od prve (R_1), a kvartalna kamatna stopa je 6%, koliki je bio kredit i kolike su ukupne kamate? Kolika je godišnja kamatna stopa?

$$q = 1 + \frac{6}{100} = 1,06 \quad \text{kvartalni faktor akumulacije}$$

Zadatak 3

Kod kredita sa jednakim anuitetima, rate obrazuju geometrijski niz:

$$R_{32} = R_1 + 3.670 = R_1 q^{31}$$

$$R_1 (q^{31} - 1) = 3.670$$

$$R_1 = \frac{3.670}{1.06^{31} - 1} = 721,29$$

Zadatak 3

Kod kredita sa jednakim anuitetima, važi: $a = R_1 q^n$

$$a = R_1 q^n = 721,29 \cdot 1.06^{32} = 4.654,76\text{€}$$

Sada možemo izračunati iznos kredita i ukupne kamate:

$$K = \frac{a}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 65.551,58$$

$$I = na - K = 83.400,74$$

Zadatak 3

Godišnja kamatna stopa se računa na osnovu veze:

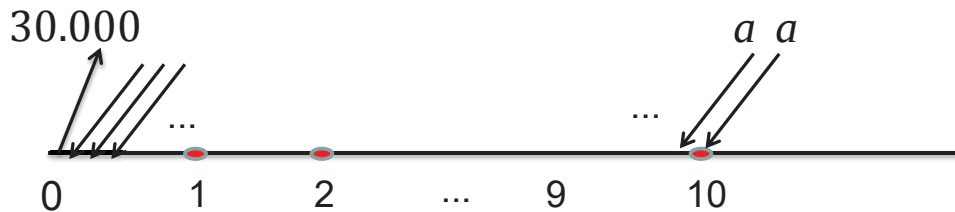
$$1 + \frac{p}{100} = \left(1 + \frac{6}{100}\right)^4 \Rightarrow p = 26,25$$

Zadatak 4

- Osoba je pozajmila iz banke 30.000€, koje vraća jednakim dekurzivnim mjesečnim anuitetima u toku 10 godina, uz 8,5% (pa)d. Osoba je uz plaćeni 24 anuitet, uplatila još 2.000€. Reprogramirati ostatak plana otplate, tj. odrediti visinu preostalih mjesečnih anuiteta ako je kamatna stopa smanjena za 1,5%.

Zadatak 4

$$q=1,085 \Rightarrow q_1 = \sqrt[12]{q}$$



$$a = 30.000 \cdot q_1^{120} \cdot \frac{q_1 - 1}{q_1^{120} - 1} \Rightarrow a = 366,93$$

Zadatak 4



Nakon plaćenog 24-og anuiteta je nakon 2 godine

$$K_2 = K \cdot q_1^{24} - a \frac{q_1^{24} - 1}{q_1 - 1} = 25.783,65$$

$$K_2' = K_2 - 2.000 = 23.783,65$$

$$q_2 = 1,07$$

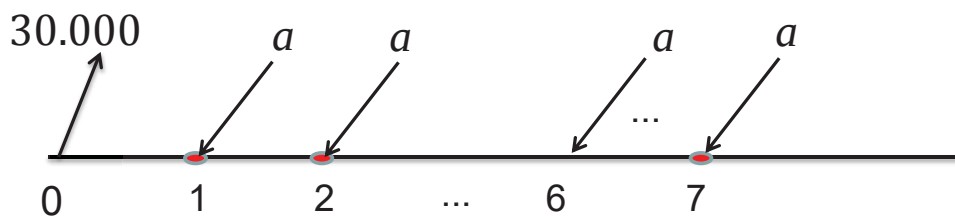
$$\Rightarrow q_3 = \sqrt[12]{q_2} \quad a' = K_2' \cdot q_3^{96} \cdot \frac{q_3 - 1}{q_3^{96} - 1} = 321,72$$

Zadatak 5

- Osoba je pozajmila iz banke 20.000€, koje vraća jednakim dekurzivnim godišnjim anuitetima u toku 7 godina, uz 9% (pa)d. Odrediti anuitet i ostatak duga na kraju druge godine.

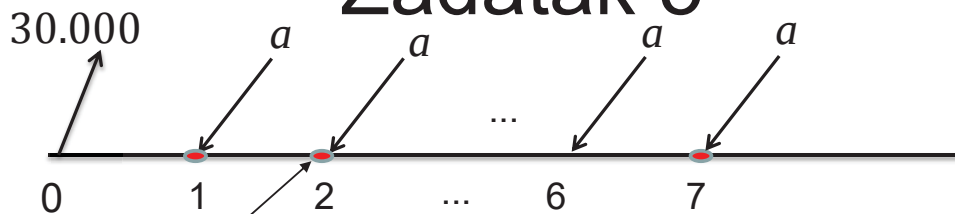
Zadatak 5

$$q=1,09$$



$$a = 20.000 \cdot q^7 \cdot \frac{q - 1}{q^7 - 1} \Rightarrow a = 3.973,81$$

Zadatak 5



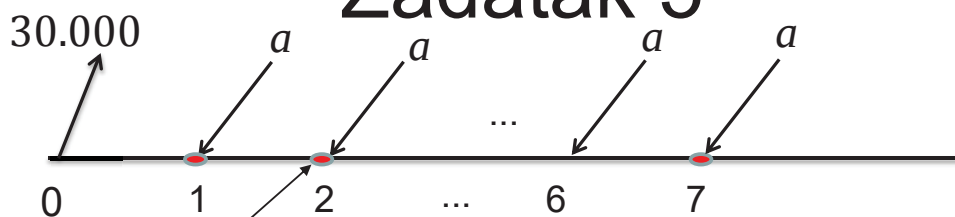
Ostatak duga na kraju 2-ge godine: (I način)

$$K_2 = 20.000 \cdot 1,09^2 - (3.973,81 \cdot 1,09 + 3.973,81)$$

$$K_2 = K \cdot q^2 - a \frac{q^2 - 1}{q - 1} = 20.000 \cdot 1,09^2 - 3.973,81 \frac{1,09^2 - 1}{1,09 - 1}$$

$$K_2 = 15.456,737$$

Zadatak 5



Ostatak duga na kraju 2-ge godine: (II način)

$$K_2 = \frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \dots + \frac{a}{q^5}$$

$$K_2 = \frac{a}{q^5} \cdot (q^4 + q^3 + \dots + 1)$$

$$K_2 = \frac{a}{q^5} \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} \Rightarrow K_2 = 15.456,737$$